微分2

微分法と最大･最小

微分法は単に微分して変化量を求めるだけでなく，ある関数の最大･最小値を求めるという演算に用いられています．変圧器の規約効率は，

$$\text{規約効率}=\frac{\text{出力}}{\text{入力}}=\frac{\text{出力}}{\text{出力}+\text{損失}} \tag{1}$$

で表され，二次端子電圧V_2･二次電流I_2，二次換算巻線抵抗R_2，鉄損W_i，力率cosθ$_2$とすれば効率ηは，

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{V_2 I_2 \cos\theta_2}{V_2 I_2 \cos\theta_2 + I_2^{\,2} R_2 + W_i} \\ &= \frac{V_2 \cos\theta_2}{V_2 \cos\theta_2 + I_2 R_2 + \dfrac{W_i}{I_2}}\end{aligned} \tag{2}$$

で表すことができます．ここで変圧器の二次電圧V_2，二次力率cosθ$_2$が一定であるとすれば，変圧器の効率ηはI_2の値によって変化することになります．

第2式の分子と分母の第1項は定数なので，

$$I_2 R_2 + \frac{W_i}{I_2} = R_2 W_i \tag{3}$$

ここでR_2とW_iも電流の変化に対して変化しないとすれば，R_2とW_iの値は一定となります．最小定理より，2数の積が一定ならば，2数の和は2数が相等しいとき最小となるので，

$$I_2 R_2 = \frac{W_i}{I_2}$$

$$\therefore \quad I_2{}^2 R_2 = W_i \tag{4}$$

となって**第4式**より，銅損$I_2{}^2R_2$と鉄損W_iが等しいとき，**第2式**の分母は最小になることがわかります．**第2式**の分子が一定なので分母が最小になれば，そのときの効率ηは最大となります．このような方法は第3種の学習でも現れてきているので容易に理解できることだと思いますがが，第2種の問題では最小値定理が適用できない複雑な関数の最大･最小を求めなければならない場合もあるので，微分法による最大･最小の判定法も完全に理解しておかなければならない重要な事項であるといえます．変圧器の最大効率を微分法で求める場合一般に次のように行います．**第2式**の

$$\eta = \frac{V_2 I_2 \cos\theta_2}{V_2 I_2 \cos\theta_2 + I_2{}^2 R_2 + W_i} \tag{5}$$

において，効率ηは電流I_2の関数なので，η(I_2)をI_2で微分すれば次のようになります．微分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

より，

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\eta(I_2)}{\mathrm{d}I_2} \\
&= \frac{V_2\cos\theta_2(V_2 I_2\cos\theta_2 + I_2{}^2R_2 + W_i) - (V_2 I_2\cos\theta_2)(V_2 I_2\cos\theta_2 + 2I_2R_2)}{(V_2 I_2\cos\theta_2 + I_2{}^2R_2 + W_i)^2} \\
&= \frac{V_2{}^2\cos^2\theta_2 I_2 + V_2R_2\cos\theta_2 I_2{}^2 + V_2\cos\theta_2 W_i - V_2{}^2\cos^2\theta_2 I_2 - 2V_2R_2\cos\theta_2 I_2{}^2}{(V_2 I_2\cos\theta_2 + I_2{}^2R_2 + W_i)^2} \\
&= \frac{V_2\cos\theta_2(W - I_2{}^2R_2)}{(V_2 I_2\cos\theta_2 + I_2{}^2R_2 + W_i)^2}
\end{aligned} \tag{6}$$

となります．ここで，$\cos\theta_2$が0でなければ，**第6式**を零にするのは，

$$W_i - I_2^{\,2} R_2 = 0$$

が成立すればよいので，

$$W_i = I_2^{\,2} R_2$$

$$\therefore \quad I_2 = \sqrt{\frac{W_i}{R_2}} \tag{7}$$

となります．**第7式**が**第5式**を最大値とすることを確認するために，**第6式**をもう一度微分すれば，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{\eta}(I_2)}{\mathrm{d}I_2^{\,2}} \\
&= \frac{-2V_2R_2\cos\boldsymbol{\theta}_2 I_2 (V_2 I_2 \cos\boldsymbol{\theta}_2 + I_2^{\,2} R_2 + W_i)^2}{(V_2 I_2 \cos\boldsymbol{\theta}_2 + I_2^{\,2} R_2 + W_i)^4} \\
&\quad \frac{-V_2\cos\boldsymbol{\theta}_2 (W_i - I_2^{\,2} R_2) \times 2(V_2 I_2 \cos\boldsymbol{\theta}_2 + I_2^{\,2} R_2 + W_i)(V_2\cos\boldsymbol{\theta}_2 + 2I_2R_2)}{(V_2 I_2 \cos\boldsymbol{\theta}_2 + I_2^{\,2} R_2 + W_i)^4} \\
&= \frac{V_2\cos\boldsymbol{\theta}_2 (V_2 I_2 \cos\boldsymbol{\theta}_2 + I_2^{\,2} R_2 + W_i)}{(V_2 I_2 \cos\boldsymbol{\theta}_2 + I_2^{\,2} R_2 + W_i)^4} \\
&\quad \frac{\left\{-2I_2R_2(V_2 I_2 \cos\boldsymbol{\theta}_2 + I_2^{\,2} R_2 + W_i) - 2(W_i - I_2^{\,2}R_2)(V_2 I_2 \cos\boldsymbol{\theta}_2 + 2I_2^{\,2}R_2)\right\}}{(V_2 I_2 \cos\boldsymbol{\theta}_2 + I_2^{\,2} R_2 + W_i)^4}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{V_2\cos\boldsymbol{\theta}_2 (V_2 I_2 \cos\boldsymbol{\theta}_2 + I_2^{\,2} R_2 + W_i)\left\{-2V_2\cos\boldsymbol{\theta}_2 W_i - 6W_iR_2I_2 + 2I_2^{\,3}R_2^{\,2}\right\}}{(V_2 I_2 \cos\boldsymbol{\theta}_2 + I_2^{\,2} R_2 + W_i)^4} \tag{8}$$

ここで，$V_2\cos\theta_2(V_2 I_2\cos\theta_2 + I_2^{\ 2}R_2 + W_i)$ は通常の遅れ力率運転では常に正となるので，

$$-2V_2\cos\theta_2 W_i - 6W_i R_2 I_2 + 2I_2^{\ 3}R_2^{\ 2} \tag{9}$$

の値の正負を調べればよいことになります．

第9式に，**第7式**を代入すれば，

$$\begin{aligned}
&= -2V_2\cos\theta_2 W_i - 6R_2 W_i \times\sqrt{\frac{W_i}{R_2}} + 2\left(\sqrt{\frac{W_i}{R_2}}\right)^3 R_2^{\ 2}\\
&= -2V_2\cos\theta_2 W_i - 6W_i\sqrt{W_i R_2} + 2W_i\sqrt{W_i R_2}\\
&= 2W_i(-V_2\cos\theta_2 - 3\sqrt{W_i R_2} + \sqrt{W_i R_2})\\
&= 2W_i(-V_2\cos\theta_2 - 2W_i\sqrt{W_i R_2})
\end{aligned} \tag{10}$$

となるので，力率cosθ$_2$が遅れ力率の範囲では**第10式**は常に負となるので，**第8式**は，$I_2 = \sqrt{W_i / R_2}$ において最大値となる．

最大効率η$_{max}$は，**第5式**に $I_2 = \sqrt{W_i / R_2}$ を代入すれば，

$$\begin{aligned}
\eta_{max} &= \frac{V_2\sqrt{\dfrac{W_i}{R_2}}\times\cos\theta_2}{V_2\sqrt{\dfrac{W_i}{R_2}}\times\cos\theta_2 + \left(\sqrt{\dfrac{W_i}{R_2}}\right)^2 R_2 + W_i}\\
&= \frac{V_2\cos\theta_2}{V_2\cos\theta_2 + \sqrt{\dfrac{W_i}{R_2}}\times 2W_i}
\end{aligned}$$

$$= \frac{V_2 \cos\theta_2}{V_2 \cos\theta_2 + 2\sqrt{W_i R_2}} \tag{11}$$

となります．この結果から微分法による方法は最小値定理による場合に比べてかなり複雑になります．しかし，最小値定理が適用できない関数の微分法による最大･最小の判定は以上の計算によって行わなければなりません．しかし，**第5式**の微分において，もう少し簡略化する方法があります．

第2式の

$$\eta = \frac{V_2 \cos\theta_2}{V_2 \cos\theta_2 + I_2 R_2 + \dfrac{W_i}{I_2}} \tag{12}$$

において，分子は一定なので**第2式**の分母が最小になれば，**第12式**を最大とするので，分母を$f(I_2)$とおいて微分すれば，

$$\frac{df(I_2)}{dI_2} = R_2 - \frac{W_i}{I_2^{\ 2}} = 0$$

$$\therefore \quad I_2 = \sqrt{\frac{W_i}{R_2}} \tag{13}$$

となり，**第13式**をさらに微分すれば，

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(I_2)}{\mathrm{d}I_2^{\ 2}} = -\left(-2\frac{W_i}{I_2^{\ 3}} \right) = 2\frac{W_i}{I_2^{\ 3}} \tag{14}$$

となるので．**第14式**は常に正となります．ゆえに$f(I_2)$は$I_2 = \sqrt{W_i / R_2}$において最小となるので，**第12式**は$I_2 = \sqrt{W_i / R_2}$で最大値となることがわかります．このようにすれば**第5式**をそのまま微分することに比べて非常に簡単となることがわかると思います．一般に，$f(x)/g(x)$の形の微分は複雑になることが多いので，分子，分母にある変数xが分子側にのみ集められる場

合，

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow f'(x) \text{ (分子のみの最大，最小を判定)} \qquad (15)$$

　または分母側にのみに集められる場合，

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow g'(x) \text{ (分母のみの最大，最小を判定)} \qquad (16)$$

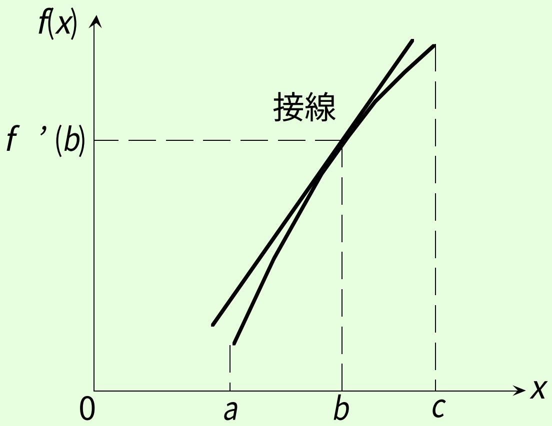
のように変形して微分したほうが一般に微分が簡単になるので，与えられた関数が**第15式**または**第16式**のように変形できる場合には変形してから微分するようにしたほうがよいでしょう．

　次に，関数を微分することによってある関数の最大と最小を知ることができる理由について考えてみることにしましょう．あるxの関数$f(x)$をxで微分し，

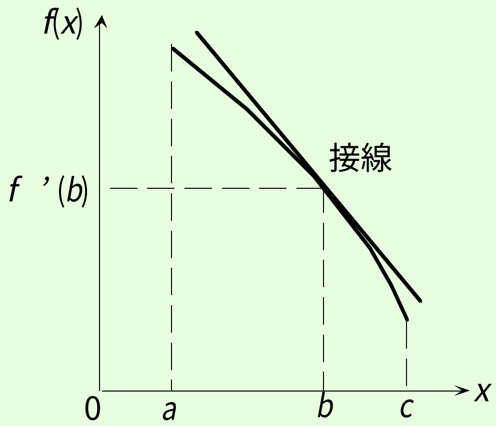
$$\frac{f(x)}{g(x)} = f'(x) \qquad (17)$$

　$a \leqq x \leqq c$の範囲において，$x=b$の値を**第16式**に代入したとき，$f'(b)$の値が正であれば関数$f(x)$の形状は**第1図**のようになります．なぜならば，$f(x)$をxで微分したものに$x=b$を代入したものは，$x=b$における$f(x)$の接線の傾きを表しているので，$f'(b)$が正であるとすれば接線の傾きが正だということになるので，関数$f(x)$は原点に対して右上がりとならなければなりません．したがって**第1図**のような形状となる事がわかります．これに対して，$f'(b)$が負となれば接線の傾きも負となるので，関数$f(x)$の形状は**第2図**のように右下がりのようにならなければなりません．

　　以上の結果により，ある関数を微分して微係数を求めて，その微係数の値の符号によって関数の形状が右上がりか右下がりかを判別することができきます．



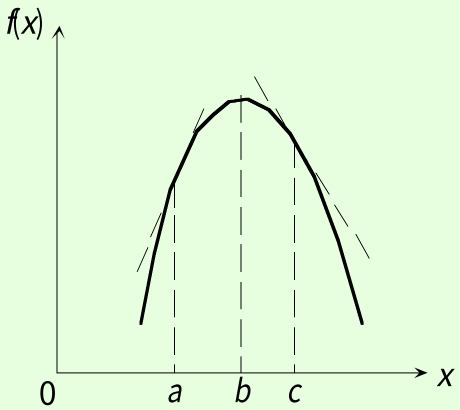
第1図



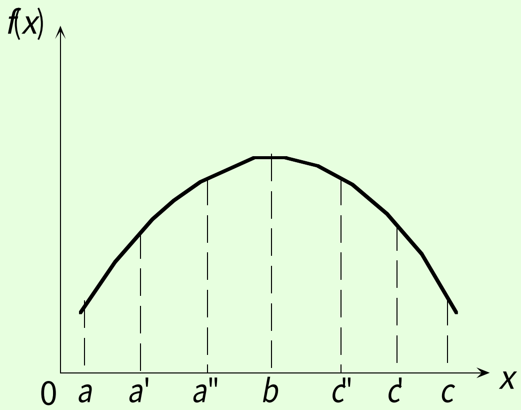
第2図

次に，**第3図**のような上に凸な関数の$x=a$と$x=c$における接線は同図のようになり，$x=a$では接線の傾きは正，$x=c$では負となっています．関数$f(x)$は$x=b$で頂点となっているとし，aとcの値をしだいにbの値になるようにして，そのときの接線の傾きは**第4図**のようになり，aとcの値がbに一致すればその傾きはx軸に平行になることがわかります．**第4図**の関数は$a \leqq x \leqq c$の区間において，$x=b$で最大値をとることが同図からわかりますが，最大値の前後において，接線の傾きが正から零になりそして負に変化していくことがわかります．これより，接線の傾き，つまり微係数の値が関数の頂点前後でどのように変化しているかを調べればその関数の形状が上に凸か下に凸になっているかを知ることができるはずです．上に凸ならば極大，下に凸ならば極小となります．**第2式**で微分したものを零とおいたのは関数の頂点を求めたことに相当するわけとなります．しかし，これだけでは微分した関数が$f'(x)$を零とするxの値において最大か最小となることは一般に判断することはできません．なぜならば，ある関数が**第5図**のような形状をしているとすれば，最大値は＋∞，最小値は0となり，関数の凸部が

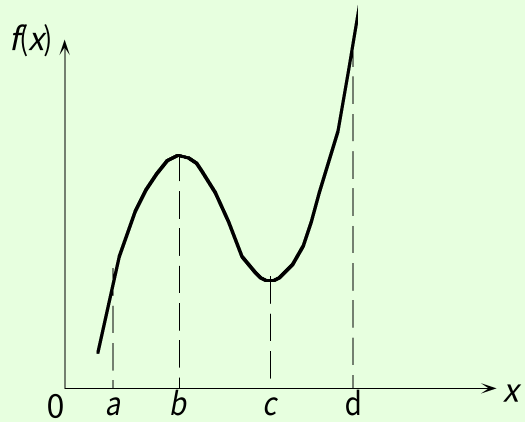
最大値および最小値になっていないことがわかります．一般にある関数を微分したものを零として求められる頂点の値は，最大または最小ではなく，上に凸なのが極大，下に凸なのが極小といい，**第5図**において関数の区間をa~dに限定すれば，$x=b$で極大値が最大値となり，また，$x=c$で極小値が最小値として求められることになります．



第3図



第4図



第5図

　このようにある関数の最大･最小は一般に区間を区切ってはじめて定義できることに注意する必要があります．これより，最大･最小というより，極大･極小というほうが正しい表現であるといえます．例として，$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ の極値を求めてみます．

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$$
$$= 6(x+1)(x-2)$$

　より，$x=-1$，2において極値を生じています．$x=-1$と$x=2$の前後の値における$f(x)$の値を調べれば**第1表**のようになります．

x=1，x=2における$f(x)$の値は，

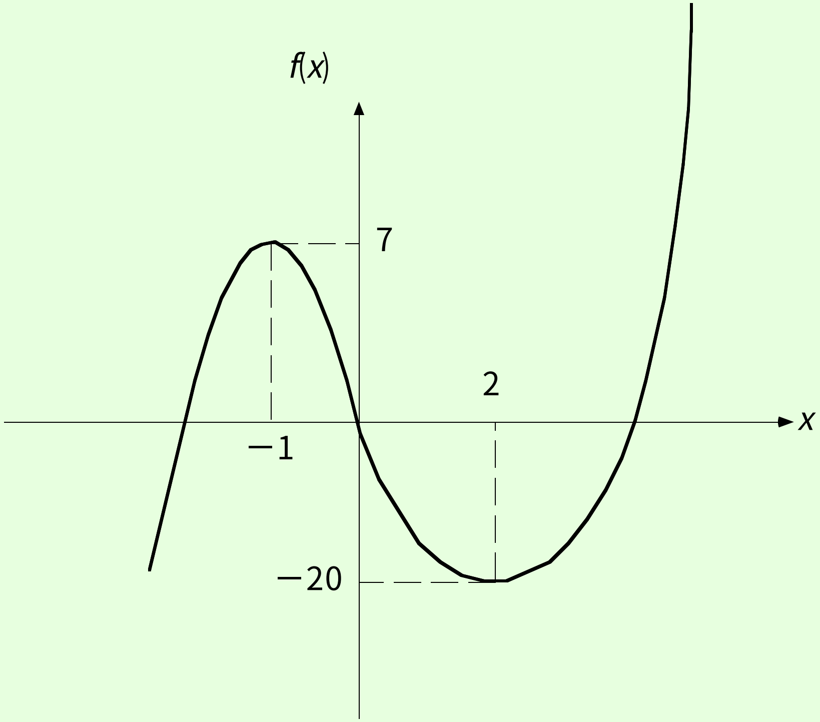
$f(-1)=2\times(-1)^3-3\times(-1)^2-12\times(-1)=7$

$f(2)=2\times(2)^3-3\times(2)^2-12\times2=-20$

第1表

x		−1		2	
$f'(x)$	↗		↘		↗
$f(x)$		7		−20	

第1表の矢印は接線の方向を表しており，x=−1の前後で上に凸，x=2の前後で下に凸となるような形状となっていることがわかります．以上の結果により，$f(x)$の形状を描けば**第6図**のようになります．**第6図**からわかるように，xの値を大きくしていけば$f(x)$の値もそれにつれていくらでも増加していくので，最大値は確定できず無限大に発散してしまうことになります．一般に関数の極大値と関数のとる最大値は一致しないから，ある区間内における極大値を最大値としているので，極大と最大を混同してはなりません．これは極小と最小についても同様です．そもそも微分法によって関数の最大･最小を求めることは副産物で，微分することによって関数の凹凸が容易に判定できるという微分の本来の目的を，ある特定の区間内における最大･最小を求めることに利用しているにすぎないともいえます．



第6図

　関数の極値を求めるために第1表のような表を用いましたが，表を用いなくとも$f'(x)$をさらに微分した二次導関数の正負を求めることによって極大か極小かを判定することができます．二次導関数は，

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2},\quad \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2},\quad y'',\quad f''(x)$$

のように書き，決して，

$$\frac{dy^2}{dx^2},\quad \frac{df(x)^2}{dx^2}$$

などと書かないように注意してください．

f¢(x)を求めて，f¢(x)を零とする値を代入したとき，

f¢(a)　**<**　0

であれば，$x=a$は極大を示し，

f¢(b)　**>**　0

であれば，$x=b$で$f(x)$は極小を示すことになるので，**第1表**のような表を用いなくても関数の極大･極小を決定できます．第2種で扱う電気現象では極大･極小が最大･最小となることがほとんどなので，いままで述べてきたことはあまり問題となることはない場合がほとんどですが，問題によっては十分に注意する必要があります．

【演習問題１】 次の関数の極大値と極小値を求め，関数の概略を描きなさい．

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$$

【解答】 与えられた関数をxで微分すれば，

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{\left(x^2-3x+2\right)'\left(x^2+3x+2\right)-\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2+3x+2\right)'}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$$

$$=\frac{\left(2x-3\right)\left(x^2+3x+2\right)-\left(x^2-3x+2\right)\left(2x+3\right)}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$$

$$=\frac{2x^3+6x^2+4x-3x^2-9x-6-2x^3-3x^2+6x^2+9x-4x-6}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$$

$$=\frac{6x^2-12}{\left(x^2+3x+2\right)^2}=\frac{6(x^2-2)}{\left(x^2+3x+2\right)^2}=0$$

$$\therefore\quad x^2-2=0$$

$$x=\pm\sqrt{2}$$

となります．二次導関数を求めれば，

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}=\frac{6\left(2x\right)\left(x^2+3x+2\right)^2-6\left(x^2-2\right)\left(x^2+3x+2\right)\times2\left(2x+3\right)}{\left(x^2+3x+2\right)^4}$$

$$= \frac{12x\left(x^2+3x+2\right)-12\left(x^2-2\right)\left(2x+3\right)}{\left(x^2+3x+2\right)^3}$$

$$= \frac{12\left(x^3+3x^2+2x-2x^3-3x^2+4x+6\right)}{\left(x^2+3x+2\right)^3}$$

$$= \frac{12\left(-x^3+6x+6\right)}{\left(x^2+3x+2\right)^3} \qquad (1)$$

$x=\sqrt{2}$ を（1）式に代入，

$$\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=\sqrt{2}} = \frac{12\left\{-\left(\sqrt{2}\right)^3+6\left(\sqrt{2}\right)+6\right\}}{\left\{\left(\sqrt{2}\right)^2+3\left(\sqrt{2}\right)+2\right\}^3}$$

$$= \frac{12\left(-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}+6\right)}{\left(4+3\sqrt{2}\right)^3}$$

$$= \frac{12\left(4\sqrt{2}+6\right)}{\left(4+3\sqrt{2}\right)^3} > 0 \quad 極小$$

$x=-\sqrt{2}$ を（1）式に代入，

$$\left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=-\sqrt{2}} = \frac{12\left[\left(-\sqrt{2}\right)^3+6\left(-\sqrt{2}\right)+6\right]}{\left[\left(-\sqrt{2}\right)^2+3\left(-\sqrt{2}\right)+2\right]^3}$$

$$= \frac{12\left(2\sqrt{2}-6\sqrt{2}+6\right)}{\left(4-3\sqrt{2}\right)^3}$$

$$= \frac{12\left(6-4\sqrt{2}\right)}{\left(4-3\sqrt{2}\right)^3} < 0 \quad \text{極大}$$

となるので，極大値及び極小値はそれぞれ次のように計算できます.

$$f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2-3\left(\sqrt{2}\right)+2}{\left(\sqrt{2}\right)^2+3\left(\sqrt{2}\right)+2} = \frac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\left(4-3\sqrt{2}\right)\left(4-3\sqrt{2}\right)}{\left(4+3\sqrt{2}\right)\left(4-3\sqrt{2}\right)} = \frac{16+18-24\sqrt{2}}{16-18}$$

$$= -17+12\sqrt{2} \quad \text{（極小値）}$$

$$f\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{\left(-\sqrt{2}\right)^2-3\left(-\sqrt{2}\right)+2}{\left(-\sqrt{2}\right)^2+3\left(-\sqrt{2}\right)+2} = \frac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\left(4+3\sqrt{2}\right)\left(4+3\sqrt{2}\right)}{\left(4-3\sqrt{2}\right)\left(4+3\sqrt{2}\right)} = \frac{34+24\sqrt{2}}{16-18}$$

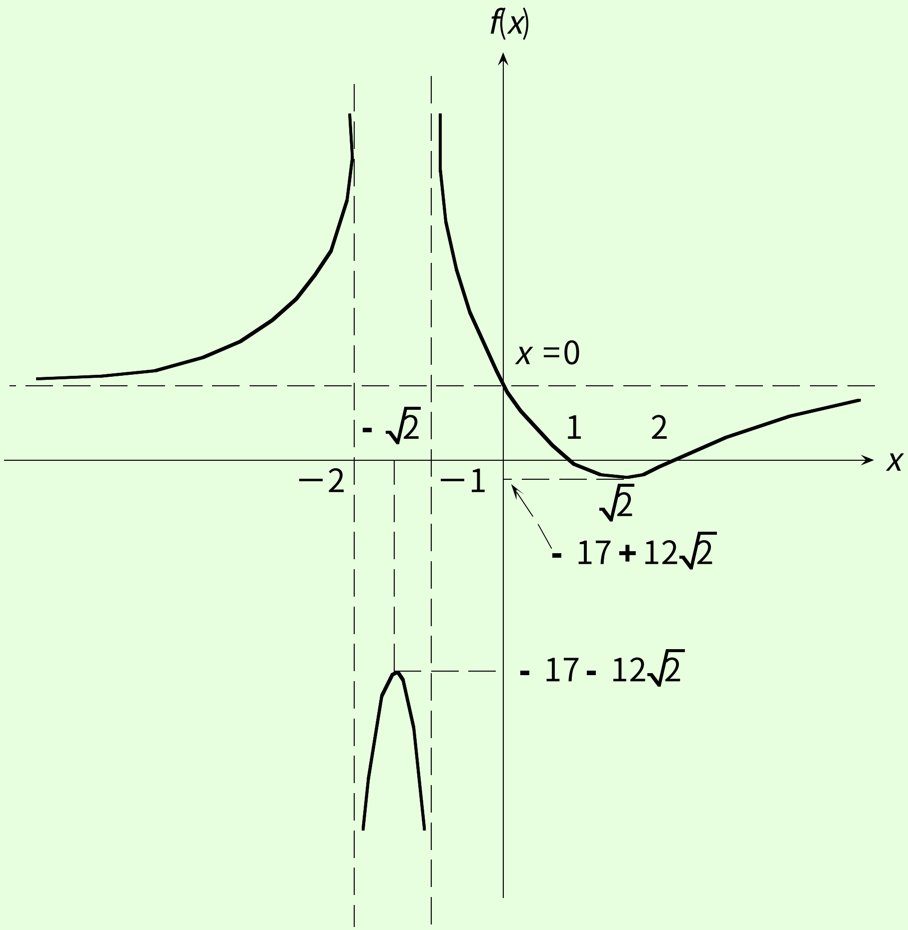
$$= -17-12\sqrt{2} = -17-12\sqrt{2} \qquad \text{（極大値）}$$

与えられた関数f（x）は，

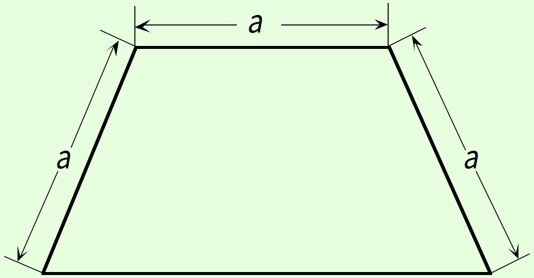
$$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} = \frac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}$$

となるので，関数の零点x＝1，x＝2，極x＝−1，x＝−2およびx＝0でf（0）＝1，x＝±でf（±∞）＝1となるので，関数f（x）の概略図は図のようになります．

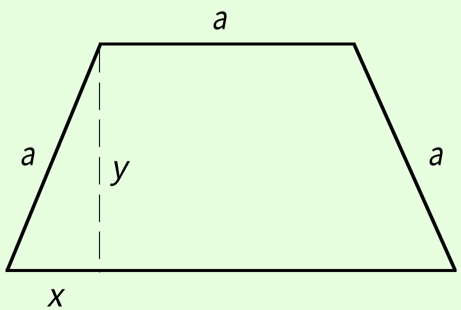
図から分かるように常に極大値＞極小値となるとは限らないので注意が必要です．つまり，極大値＝最大値，極小値＝最小値が常に成立するとは限らないということです．極大，極小というのは関数の形状を判断するためのものでこれにより最大，最小の判定はできません．このことから，関数の最大値又は最小値を求める場合必ず二次導関数を求めなければならないのはこのためです．最大値とは極大であってかつ有限における最大の値，また最小値とは極小であってかつ有限における最小の値ということになります．通常の電気現象では単に微分するだけで最大値，最小値が求まる場合がほとんどですが数学的には必ず二次導関数を求めなければなりません．


f(x)
x =0
1
2
x
-2
-1
- √2
√2
- 17 + 12√2
- 17 - 12√2

【演習問題２】 図のような三辺の長さがaの台形がある．この台形の面積を最大とする台形の形状はどのようになるか．



【解答】第１図 のように，x，yをとれば台形の面積Sは次のようになります．



第１図

$$S=\frac{1}{2}(a+a+2x)y=\frac{2}{2}(a+x)y=(a+x)y$$

$$x^2+y^2=a^2$$

より，

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (0 \leqq x \leqq a)$$

$$\therefore \quad S = (a+x)\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (1)$$

となるので面積Sの最大値を求めるためにSをxで微分すれば，

$$\frac{dS}{dx} = (a+x)'\sqrt{a^2-x^2} + (a+x)\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)'$$

$$= \sqrt{a^2-x^2} + (a+x) \times \frac{1}{2}(a+x)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x)$$

$$= \sqrt{a^2-x^2} - \frac{x(a+x)}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\left(a^2-x^2\right) - (a+x)x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{(a+x)(a-x) - (a+x)x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{(a+x)(a-x-x)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{(a+x)(a-2x)}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0$$

となるので，

$$(a-2x) = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{a}{2}$$

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{(-a-4x)\sqrt{a^2-x^2} - (a+x)(a-2x) \times \frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x)}{(a^2-x^2)}$$

$$= \frac{-(4x+a)\sqrt{a^2-x^2}+x(a+x)(a-2x)(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(a^2-x^2)}$$

$$= \frac{-(4x+a)(a^2-x^2)+x(a+x)(a-2x)}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(a+x)\left\{(x-a)(4x+a)+x(a-2x)\right\}}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

ここで，x＝a／2において，$(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$は正なので，（2）式の分子の$(x-a)(4x+a)+x(a-2x)$にx＝a／2を代入すれば，

$$\left(\frac{a}{2}-a\right)\left(4\times\frac{a}{2}+a\right)+\frac{a}{2}\left(a-\frac{2a}{2}\right)$$

$$= -\frac{a}{2}\times 3a = -\frac{3a^2}{2} < 0$$

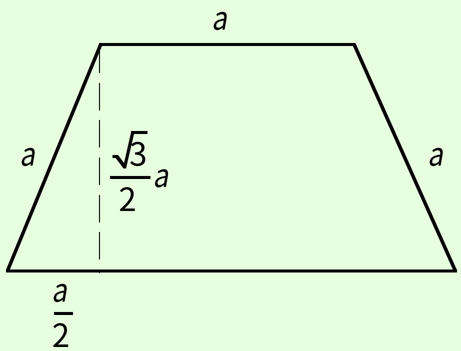
となるので，Sはx＝a／2において最大となり，その値は（1）式にx＝a／2を代入すれば，

$$S = (a+x)\sqrt{a^2-x^2}$$

$$= \left(a+\frac{a}{2}\right)\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

となり，台形は**第２図**のような寸法の形状となります．



第2図