

微分 1

(1) 微分と接線の傾き

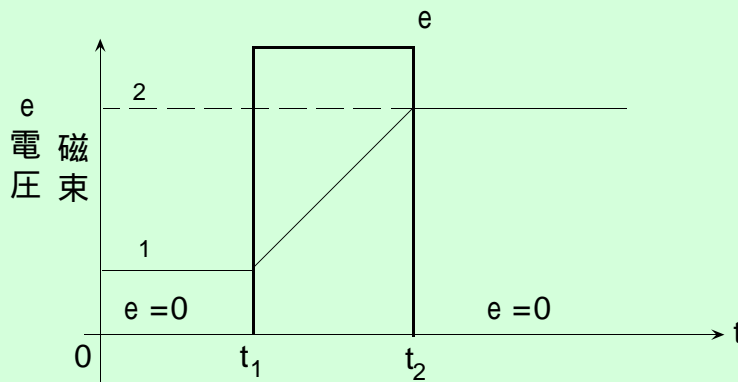
電磁誘導によって発生する起電力 e はファラデーの法則により、

$$e = - \frac{df}{dt} \quad (1)$$

で求められることはよく知られています。この式の意味することは、磁束 f を時間 t で微分したものが起電力 e となり、マイナスの符号は鎖交磁束数の減少に比例することを表しています。この**第1式**は、また、

$$e = - \frac{Df}{Dt} \quad (2)$$

としても表現されることがありますが、これはある微小時間 Δt における微小磁束 Δf の変化を時間を区切ってその時間内だけに成立する式と考えてよいでしょう。**第1図**のように磁束 f が時間に対して変化するとき、誘導される電圧 e の波形は図のようになります。



第1図

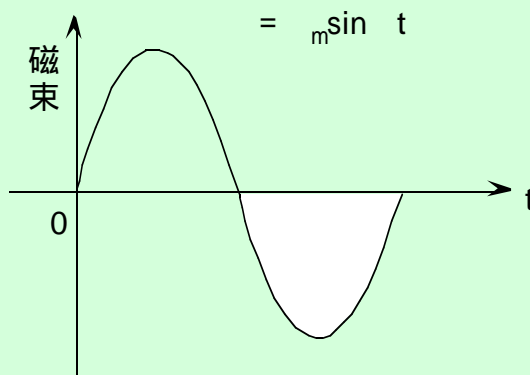
このとき、時間 $t_1 \sim t_2$ 間の磁束の変化 $f_1 \sim f_2$ は同図からわかるように、直線的に変化しています。このときの磁束の直線の傾きは、

$$\frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} \quad (3)$$

で与えられ、 $t_2 - t_1$ を微小にとれば、 $\Delta t = t_2 - t_1$ となり、磁束も同様に $\Delta f = f_2 - f_1$ とすることができるので、

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} \quad (4)$$

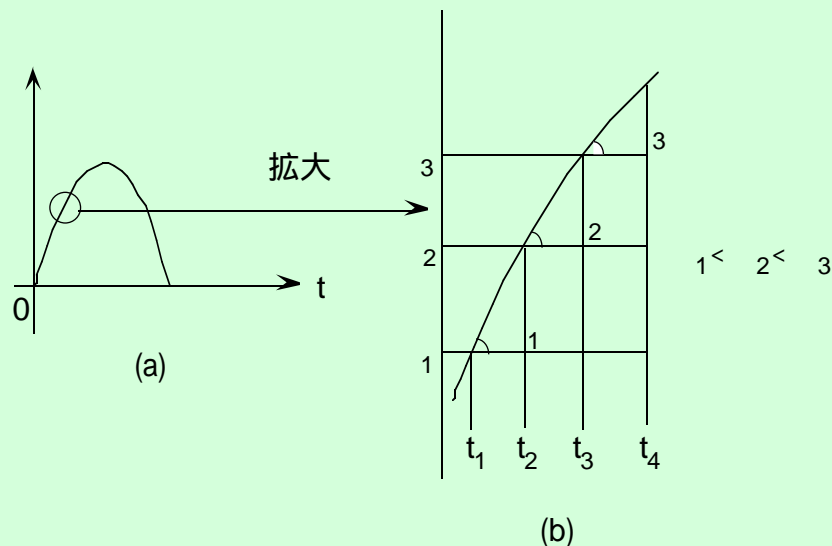
となって、第2式は直線の傾きを表していることがわかります。このことから、第1図の電圧 e は、磁束の直線の傾きに比例して発生することになります。時間 t に対する磁束の変化が第1図のように直線であれば、その傾きは第3式によって容易に求められますが、磁束が第2図のような正弦波状に変化したとすれば誘導される電圧はどのようなになるでしょうか。



第2図

いままでの結果により、誘導される電圧 e は磁束の傾きに比例するのですが、正弦波ではどこが直線の傾きを表しているのかは図を見ただけでは判断することは不可能です。そこで、第2図の正弦波を拡大し微小時間 $\Delta t = t_2 - t_1$ に対する磁束

の変化 $\Delta = \phi_2 - \phi_1$ を考えてみることにします。



第3図

第3図において、 $t_2 \sim t_1$ の磁束の変化は正弦波の曲線であり、 $\phi_2 - \phi_1 / t_2 - t_1$ によって計算される直線の傾きと曲線とは重なることはありませんが、 $t_2 \sim t_1$ の値をさらに小さくしていけば、曲線の形状はほとんど直線と見なしてよいことがわかります。つまり、第2図のような正弦波でも時間の範囲を限りなく小さく区切ってみれば、磁束の変化は直線的に変化すると見なしてよいことがわかります。このように時間の分割を限りなく多くしていけば磁束は微小区間における直線の集合として表現できるので、各微小時間における電圧がファラデーの法則により確立されることとなります。

磁束の時間に対する変化がどのようなであっても以上のような作業をすれば電圧は求められますが、一般にこのような作業は磁束の波形が複雑になればなるほど困難になるので、このような方法で発生する電圧を求めることは手計算では不可能と

なります。磁束が正弦波のように時間に対して一定の規則で変化しているときは磁束の傾きを求めることは簡単であり、このような方法を微分法といいます。微分法はある関数の直線の傾きを求めるのがその第一の目的といえるものですが、第3図(b)からわかるように、磁束の直線の傾きは時間の区間によって異なっているので、傾きの値を特定することはこのままではできません。微分法の公式によれば、磁束の時間に対する微分は次のようになります。

$$\frac{dF_m \sin \omega t}{dt} = \omega F_m \cos \omega t \quad (5)$$

第5式を見ると直線の傾きのはずが $\cos \omega t$ と余弦の式になっているので直線ではないと感じられるかもしれませんが、第5式にある時間 t_1 を代入すれば、 $F_m \cos \omega t_1$ となって t_1 における傾きを表すこととなります。つまり、1周期 $t_1 \sim t_n$ まで時間を連続的に変化させたとき、直線の傾きの値は余弦状に変化することを示しています。以上により、微分による第一の目的はある関数の直線(正確には接線の傾き)を求めることであるといえます。第2種においてマスタしなければならない微分法の基本公式は次のよう示されます。

基本公式(1)

$$y = x^n$$

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$y = \log x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$y = e^{ax}$$

$$\frac{dy}{dx} = ae^{ax}$$

公式 ① において y は x の関数なので、 y を x で微分する場合、 dy/dx のように書くのが一般的ですが、 y の代わりに $f(x)$ として $df(x)/dx$ としたり、 y' 、 $f'(x)$ と書いたりすることがありますが、すべて同じことを表しています。ただし、 y' と表示する場合には y は x の関数で、 x で微分すると表現しないと、実際の試験では減点される可能性があるので注意が必要です。

基本公式(2)

$$y = \sin ax$$

$$\frac{dy}{dx} = a \cos ax$$

$$y = \cos ax$$

$$\frac{dy}{dx} = -a \sin ax$$

$$y = \tan ax$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\cos^2 ax} = a \sec^2 ax$$

(2)関数の積と商の微

$y=(x+1)(x^2+3)$ を微分する場合、基本公式ではこの関数をそのまま微分することはできません。そこで、与えられた関数を展開すれば、

$$y=x^3+x^2+3x+3 \tag{6}$$

となるので、(6)式を基本公式(1)の ① により微分すれば、

$$\frac{dy}{dx} = 3x^{3-1} + 2x^{2-1} + 3 \times 1x^{1-1} + 0 = 3x^2 + 2x + 3$$

となって微分することができます．ところが，

$$y = \frac{x-1}{x^2+1} \tag{7}$$

のような関数ではどのように変形しても**第6式**のようににはならないので，このままでは微分することができません．この関数 y は， $(x-1)$ という関数と $1/(x^2+1)$ が掛け合わさったものと考えることができるので，異なる二つの関数の商の形となっています．また，先ほどの $y=(x+1)(x^2+3)$ は $(x+1)$ と (x^2+3) の積の関数となっていることがわかります．このようにある関数が2以上の異なる関数の積または商の形で表されているものを微分する方法として，

基本公式(3)

$$y = f(x)g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{g(x)^2}$$

の公式があります． $f(x)$ および $g(x)$ は x の関数を表しています．公式(3)のように，積の形で表されている関数の微分は，一方を微分し他方をそのままとしたものと，一方をそのままとし他方を微分したものの和で表されることを示しています．公式

によれば, $y=(x+1)\sqrt{x^2+3}$ の微分は次のようになります.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (x+1)\sqrt{x^2+3} + (x+1)(x^2+3)\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}} \\ &= 1\sqrt{x^2+3} + (x+1)(2x) \\ &= x^2+3x+2x^2+2x = 3x^2+2x+3\end{aligned}\tag{8}$$

となって当然展開して微分した場合と一致します. 次に $y=(x-1)/\sqrt{x^2+1}$ の微分は公式 により,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(x-1)\sqrt{x^2+1} - (x-1)(x^2+1)\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1\sqrt{x^2+1} - (x-1)(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}\end{aligned}\tag{9}$$

となります. ここで注意しなければならないのは, 基本公式(3)の関数 $f(x)$, $g(x)$ はすべて基本公式(1)および(2)で微分できる関数に限られるということです. 関数 $y = x/\sqrt{x^2+1}$ では, x はそのまま微分できますが, $\sqrt{x^2+1}$ は基本公式(1)ではそのまま微分することができないので, 他の方法によらなければなりません.

(3)合成関数の微分法

基本公式(3)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

$$y = \{f(x)\}^n$$

$$\frac{dy}{dx} = n\{f(x)\}^{n-1} f'(x)$$

$y = \sqrt{x^2 + 1}$ の微分は、 $y = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ と変形すれば、基本公式(4)の より、 $f(x) = (x^2 + 1)$ と考えれば、 $n = 1/2$ の場合となるので、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} \{f(x)\}^{\frac{1}{2}-1} f'(x) = \frac{1}{2} \{x^2 + 1\}^{-\frac{1}{2}} (2x) \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned} \quad (10)$$

となります。そこで、 $y = x/\sqrt{x^2 + 1}$ の場合には、上の結果と基本公式(3)の を用いて、 $f(x) = x$ 、 $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ とおけば、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + 1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{(\sqrt{x^2 + 1})^2} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} \\ &= \frac{(x^2 + 1) - x^2}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned} \quad (11)$$

となります。次に、 $y = (ax^2 + b)^n$ の微分では展開して微分することは n が特定の値ではないので、このままでは行うことが困難です。そこで、 $u = ax^2 + b$ とおいてこの両辺を x について微分すれば、

$$\frac{du}{dx} = a \cdot 2x^{2-1} = 2ax$$

となり，また， $y = (ax^2 + b)^n = u^n$ となるのでこの両辺を u について微分すれば，

$$\frac{dy}{du} = nu^{n-1}$$

となるので， $u = ax^2 + b$ と置き換えれば，

$$\frac{dy}{du} = n(ax^2 + b)^{n-1}$$

となります．これより， $y = (ax^2 + b)^n$ の微分は基本公式(4)のより次のようにすることができます．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = n(ax^2 + b)^{n-1} \cdot 2ax = 2anx(ax^2 + b)^{n-1} \quad (12)$$

次に， $y = \sin^2 x$ の微分は基本公式(2)を用いるだけではできないので，加法定理，

$$\begin{aligned} \cos(x + x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

$$\therefore \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

より，基本公式(2)のを用いれば，

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{(1 - \cos 2x)'}{2} = \frac{-(-2\sin 2x)}{2} \\ &= \sin 2x = 2\sin x \cos x \end{aligned} \quad (13)$$

となります．次に， $u = \sin x$ とおけば，

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$y = u^2$ より ,

$$\frac{dy}{du} = 2u$$

から , $y = \sin^2 x$ の微分は ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 2u \cos x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \quad (14)$$

となつて加法定理を使用した場合と同じになります . 以上により , 基本公式(2)の $y = \tan x$ の微分の公式は次のように証明することができます .

$$y = \tan ax = \frac{\sin ax}{\cos ax}$$

なので , $f(x) = \sin ax$, $g(x) = \cos ax$ とおけば , 基本公式(3)の より ,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{a \cos ax \cos ax - \sin ax \cdot (-a \sin ax)}{\cos^2 ax} \\ &= \frac{a(\cos^2 ax + \sin^2 ax)}{\cos^2 ax} = \frac{a}{\cos^2 ax} \\ &= a \sec^2 ax \end{aligned} \quad (15)$$

また , 指数関数の $y = e^{ax}$ の微分は ,

$$\frac{dy}{dx} = ae^{ax}$$

となつて , 微分した後でも必ず微分前の原関数が存在するということです . 対数関数の微分は対数の性質をうまく利用すれ

ば比較的簡単に行える場合が多いといえます。

$\log \frac{x+a}{x}$ の微分は、

$$\log \frac{x+a}{x} = \log(x+a) - \log x$$

$$\backslash \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} = \frac{-a}{x(x+a)}$$

となることがわかります。

(16)

【演習問題】 次の関数を微分せよ

$$(1) y = \frac{x^2 - 1}{3x^2 + 1}$$

$$(2) y = \sin(\cos x)$$

$$(3) y = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$(4) y = e^{x^x}$$

【解答】 (1) $y = \frac{x^2 - 1}{3x^2 + 1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{\{g(x)\}^2}$$

より, $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 3x^2 + 1$ とおけば,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2 - 1)(3x^2 + 1)' - (x^2 - 1)'(3x^2 + 1)}{\{(3x^2 + 1)\}^2} \\ &= \frac{(2x)(3x^2 + 1) - (x^2 - 1)(3 \times 2x)}{(3x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(6x^3 + 2x) - (6x^3 - 6x)}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{(6x^3 + 2x) - (6x^3 - 6x)}{(3x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2x + 6x}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{8x}{(3x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$(2) y = \sin(\cos x)$$

において, $\cos x = X$ とおけば,

$$\frac{dX}{dx} = \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{d \sin X}{dX} = \cos X$$

$$\begin{aligned} \backslash \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{dX}{dx} \frac{dy}{dX} = -\sin x \cos X \\ &= -\sin x \cos(\cos x) \end{aligned}$$

$$(3) y = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

において, $X = x + \sqrt{x^2 + a^2}$ とおけば,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)' = 1 + \left(x^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2x \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(x^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2x \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(x^2 + a^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = 1 + x \left(x^2 + a^2\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dX} = (\log X)' = \frac{1}{X}$$

$$\begin{aligned} \backslash \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{dX}{dx} \frac{dy}{dX} = \left(1 + x \left(x^2 + a^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}
 \end{aligned}$$

(4) $y = e^{x^x}$

の両辺の対数をとれば,

$$\log y = \log e^{x^x} = x^x \log e = x^x$$

となる. 上式の左辺をxで微分すれば,

$$\frac{d \log y}{dx} = \frac{1}{y} (y)^{\dagger} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$

(1)

右辺を微分するために, $X = x^x$ とおいて両辺の対数をとれば,

$$\log X = x \log x$$

となるので,

$$\frac{d \log X}{dx} = \frac{1}{X} X^{\ddagger} = \frac{1}{X} \frac{dX}{dx}$$

$$\frac{d(x \log x)}{dx} = 1 \nabla \log x + x \nabla \frac{1}{x} = \log x + 1$$

より,

$$\setminus \frac{dX}{dx} = X (\log x + 1) = x^x (\log x + 1)$$

(2)

(1) 式 = (2) 式より,

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x^x (\log x + 1)$$

$$\setminus \frac{dy}{dx} = yx^x (\log x + 1) = e^{x^x} x^x (\log x + 1)$$