微分1

(1)微分と接線の傾き

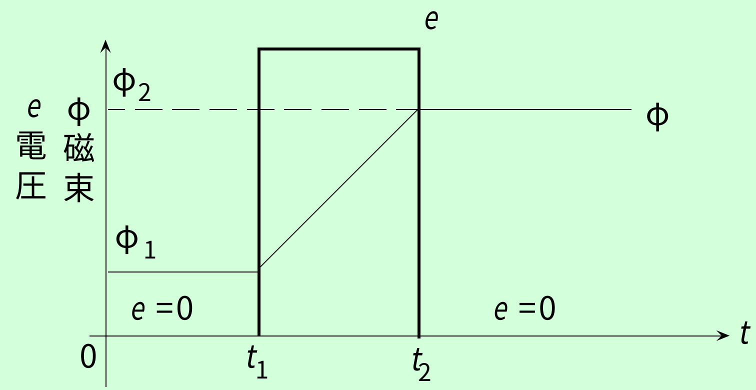
電磁誘導によって発生する起電力*e*はファラデーの法則により，

$$e = -\frac{df}{dt} \qquad (1)$$

で求められることはよく知られています．この式の意味することは，磁束φを時間*t*で微分したものが起電力*e*となり，マイナスの符号は鎖交磁束数の減少に比例することを表しています．この**第1式**は，また，

$$e = -\frac{Df}{Dt} \qquad (2)$$

としても表現されることがありますが，これはある微小時間△*t*における微小磁束△φの変化を時間を区切ってその時間内だけに成立する式と考えてよいでしょう．**第1図**のように磁束φが時間に対して変化するとき，誘導される電圧*e*の波形は図のようになります．



第1図

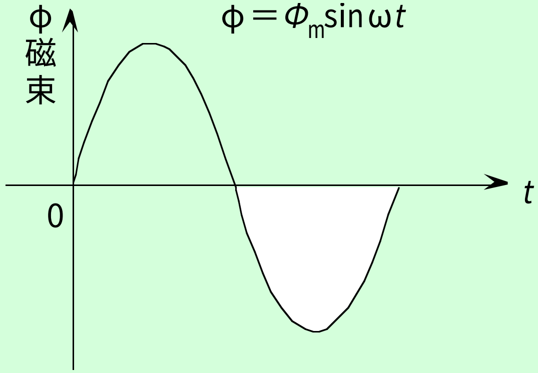
このとき，時間t_1～t_2間の磁束の変化φ$_1$～φ$_2$は同図からわかるように，直線的に変化しています．このときの磁束φの直線の傾きは，

$$\frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} \qquad (3)$$

で与えられ，t_2-t_1を微小にとれば，△t=t_2-t_1となり，磁束φも同様に△φ＝φ$_2$－φ$_1$とすることができるので，

$$\backslash \ \frac{Df}{Dt} = \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} \qquad (4)$$

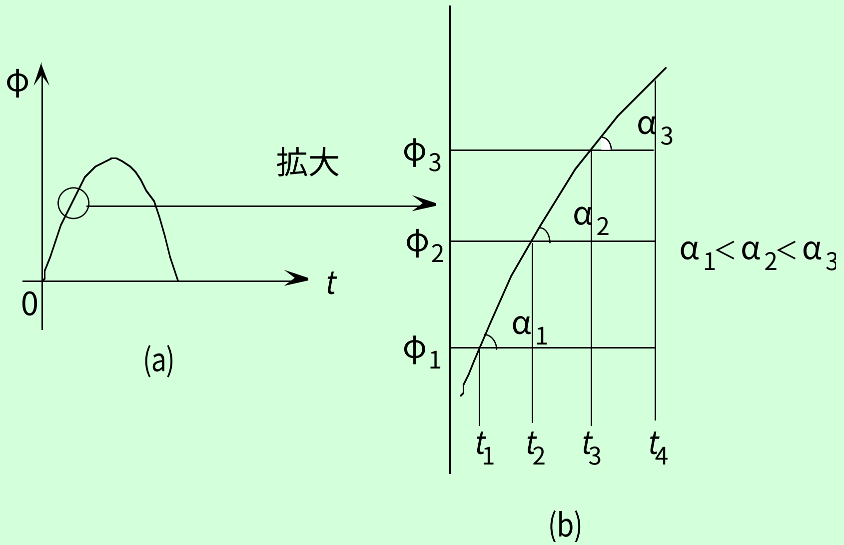
となって，**第２式**は直線の傾きを表していることがわかります．このことから，**第１図**の電圧eは，磁束φの直線の傾きに比例して発生することになります．時間tに対する磁束φの変化が**第１図**のように直線であれば，その傾きは**第３式**によって容易に求められますが，磁束φが**第２図**のような正弦波状に変化したとすれば誘導される電圧はどのようになるでしょうか．



〗**第２図**

　いままでの結果により，誘導される電圧eは磁束φの傾きに比例するのですが，正弦波ではどこが直線の傾きを表しているのかは図を見ただけでは判断することは不可能です．そこで，**第２図**の正弦波を拡大し微小時間△t'=t_2-t_1に対する磁束

の変化$\triangle\phi'=\phi_2-\phi_1$を考えてみることにします．



第3図

第3図において，$t_2\sim t_1$の磁束の変化は正弦波の曲線であり，$\phi_2\sim\phi_1/t_2\sim t_1$によって計算される直線の傾きと曲線とは重なることはありませんが，$t_2\sim t_1$の値をさらに小さくしていけば，曲線の形状はほとんど直線と見なしてよいことがわかります．つまり，**第2図**のような正弦波でも時間の範囲を限りなく小さく区切ってみれば，磁束の変化は直線的に変化すると見なしてよいことがわかります．このように時間の分割を限りなく多くしていけば磁束は微小区間における直線の集合として表現できるので，各微小時間における電圧がファラデーの法則により確立されることになります．

磁束の時間に対する変化がどのようであっても以上のような作業をすれば電圧は求められますが，一般にこのような作業は磁束の波形が複雑になればなるほど困難になるので，このような方法で発生する電圧を求めることは手計算では不可能と

なります．磁束が正弦波のように時間に対して一定の規則で変化しているときは磁束の傾きを求めることは簡単であり，このような方法を微分法といいいます．微分法はある関数の直線の傾きを求めるのがその第一の目的といえるものですが，**第3図(b)** からわかるように，磁束φの直線の傾きは時間の区間によって異なっているので，傾きの値を特定することはこのままではできません．微分法の公式によれば，磁束φの時間に対する微分は次のようになります．

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_m \sin \boldsymbol{w} t}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{w}\mathbf{F}_m \cos \boldsymbol{w} t \tag{5}$$

第5式 を見ると直線の傾きのはずがcosωtと余弦の式になっているので直線ではないと感じられるかもしれませんが，**第5式** にある時間t_1を代入すれば，ωΦ$_m$cosωt_1となってt_1における傾きを表すことになります．つまり，1周期t_1～t_nまで時間を連続的に変化させたとき，直線の傾きの値は余弦状に変化することを示しています．以上により，微分による第一の目的はある関数の直線(正確には接線の傾き)を求めることであるといえます．第2種においてマスタしなければならない微分法の基本公式は次のよう示されます．

●基本公式(1)●

①$y = x^n$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$$

②$y = \log x$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$$

③$y = e^{ax}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ae^{ax}$$

公式①～③においてyはxの関数なので，yをxで微分する場合，dy/dxのように書くのが一般的ですが，yの代わりに$f(x)$としてd$f(x)$/dxとしたり，y'，$f'(x)$と書いたりすることがありますが，すべて同じことを表しています．ただし，y'と表示する場合にはyはxの関数で，xで微分すると表現しないと，実際の試験では減点される可能性があるので注意が必要です．

●基本公式(2)●

①$y = \sin ax$

$$\frac{dy}{dx} = a\cos ax$$

②$y = \cos ax$

$$\frac{dy}{dx} = -a\sin ax$$

③$y = \tan ax$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\cos^2 ax} = a\sec^2 ax$$

(2)関数の積と商の微

$y=(x+1)(x^2+3)$を微分する場合，基本公式ではこの関数をそのまま微分することはできません．そこで，与えられた関数を展開すれば，

$$y=x^3+x^2+3x+3 \tag{6}$$

となるので，(6)式を基本公式(1)の①により微分すれば，

$$\frac{dy}{dx}=3x^{3-1}+2x^{2-1}+3\times 1x^{1-1}+0=3x^2+2x+3$$

となって微分することができます．ところが，

$$y=\frac{x-1}{x^2+1} \tag{7}$$

のような関数ではどのように変形しても**第６式**のようにはならないので，このままでは微分することができません．この関数yは，$(x-1)$という関数と$1/(x^2+1)$が掛け合わさったものと考えることができるので，異なる二つの関数の商の形となっています．また，先ほどの$y=(x+1)(x^2+3)$は$(x+1)$と(x^2+3)の積の関数となっていることがわかります．このようにある関数が2以上の異なる関数の積または商の形で表されているものを微分する方法として，

●基本公式(3)●

①$y=f(x)g(x)$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

②$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

の公式があります．$f(x)$および$g(x)$はxの関数を表しています．公式①のように，積の形で表されている関数の微分は，一方を微分し他方をそのままとしたものと，一方をそのままとし他方を微分したものの和で表されることを示しています．公式

①によれば，$y=(x+1)(x^2+3)$の微分は次のようになります．

$$\frac{dy}{dx}=(x+1)'(x^2+3)+(x+1)(x^2+3)'$$
$$=1\times(x^2+3)+(x+1)(2x)$$
$$=x^2+3x+2x^2+2x=3x^2+2x+3 \tag{8}$$

となって当然展開して微分した場合と一致します．次に$y=(x-1)/(x^2+1)$の微分は公式②により，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-1)'(x^2+1)-(x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{1\times(x^2+1)-(x-1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} \tag{9}$$

となります．ここで注意しなければならないのは，基本公式(3)の関数$f(x)$，$g(x)$はすべて基本公式(1)および(2)で微分できる関数に限られるということです．関数$y=x/\sqrt{x^2+1}$では，xはそのまま微分できますが，$\sqrt{x^2+1}$は基本公式(1)ではそのまま微分することができないので，他の方法によらなければなりません．

(3)合成関数の微分法

●基本公式(3)●

①$\displaystyle\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

②$y=\left\{f(x)\right\}^{n}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=n\left\{f(x)\right\}^{n-1}\cdot f(x)'$$

$y=\sqrt{x^2+1}$の微分は，$y=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$　と変形すれば，基本公式(4)の②より，$f(x)=(x^2+1)$と考えれば，$n=1/2$の場合となるので，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\left\{f(x)\right\}^{\frac{1}{2}-1}\cdot f'(x)=\frac{1}{2}\left\{x^2+1\right\}^{-\frac{1}{2}}(2x)$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (10)$$

となります．そこで，$y=x/\sqrt{x^2+1}$の場合には，上の結果と基本公式(3)の②を用いて，$f(x)=$，$g(x)=\sqrt{x^2+1}$とおけば，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f(x)'g(x)-f(x)g(x)'}{g(x)^2}$$

$$=\frac{1\times\sqrt{x^2+1}-x\times\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \qquad (11)$$

となります．次に，$y=(ax^2+b)^n$の微分では展開して微分することはnが特定の値ではないので，このままでは行うことが困難です．そこで，$u=ax^2+b$ とおいてこの両辺をxについて微分すれば，

$$\frac{du}{dx} = a \times 2 \times x^{2-1} = 2ax$$

となり，また，$y = (ax^2 + b)^n = u^2$ となるのでこの両辺をuについて微分すれば，

$$\frac{dy}{du} = nu^{n-1}$$

となるので，$u = ax^2 + b$ と置き換えれば，

$$\frac{dy}{du} = n(ax^2 + b)^{n-1}$$

となります．これより，$y = (ax^2 + b)^n$ の微分は基本公式(4)の①より次のようにすることができます．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = n(ax^2 + b)^{n-1} \cdot 2ax = 2anx(ax^2 + b)^{n-1} \tag{12}$$

次に，$y = \sin^2 x$ の微分は基本公式(2)を用いるだけではできないので，加法定理，

$$\cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\therefore \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

より，基本公式(2)の②を用いれば，

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1 - \cos 2x)'}{2} = \frac{-(2\sin 2x)}{2}$$

$$= \sin 2x = 2\sin x \cos x \tag{13}$$

となります．次に，$u = \sin x$ とおけば，

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$y=u^2$$ より，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=2u$$

から，$y=\sin^2 x$ の微分は，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2u\cdot\cos x=2\sin x\cos x=\sin 2x \tag{14}$$

となって加法定理を使用した場合と同じになります．以上により，基本公式(2)の③のy=tan α xの微分の公式は次のように証明することができます．

$$y=\tan ax=\frac{\sin ax}{\cos ax}$$

なので，$f(x)=\sin ax$，$g(x)=\cos ax$ とおけば，基本公式(3)の②より，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f(x)'g(x)-f(x)g(x)'}{g(x)^2}$$

$$=\frac{a\cos ax\cos ax-\sin ax\times(-a\sin ax)}{\cos^2 ax}$$

$$\frac{a(\cos^2 ax+\sin^2 ax)}{\cos^2 ax}=\frac{a}{\cos^2 ax}$$

$$=a\sec^2 ax \tag{15}$$

　また，指数関数の $y=e^{ax}$ 微分は，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=ae^{ax}$$

となって，微分した後でも必ず微分前の原関数が存在するということです．対数関数の微分は対数の性質をうまく利用すれ

ば比較的簡単に行える場合が多いといえます.

$\log\dfrac{x+a}{x}$ の微分は,

$$\log\frac{x+a}{x}=\log(x+a)-\log x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}=\frac{-a}{x(x+a)} \tag{16}$$

となることがわかります.

【演習問題】 次の関数を微分せよ

（1） $y=\dfrac{x^2-1}{3x^2+1}$　　　　（2） $y=\sin(\cos x)$

（3） $y=\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$　　　　（4） $y=e^{x^x}$

【解答】 （1） $y=\dfrac{x^2-1}{3x^2+1}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)'g(x)-f(x)g(x)'}{\{g(x)\}^2}$$

より，$f(x)=x^2-1$，$g(x)=3x^2+1$ とおけば，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2-1)'(3x^2+1)-(x^2-1)(3x^2+1)'}{\{(3x^2+1)\}^2}$$

$$=\frac{(2x)(3x^2+1)-(x^2-1)(3\times 2x)}{(3x^2+1)^2}$$

$$=\frac{(6x^3+2x)-(6x^3-6x)}{(3x^2+1)^2}=\frac{(6x^3+2x)-(6x^3-6x)}{(3x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x+6x}{(3x^2+1)^2}=\frac{8x}{(3x^2+1)^2}$$

（2） $y=\sin(\cos x)$

において，$\cos x=X$ とおけば，

$$\frac{dX}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$
$$\frac{dy}{dX} = \frac{d\sin X}{dX} = \cos X$$
$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dX}{dx}\cdot\frac{dy}{dX} = -\sin x \cdot \cos X$$
$$= -\sin x \cdot \cos(\cos x)$$

（3）　$y = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

において，$X = x + \sqrt{x^2 + a^2}$ とおけば，

$$\frac{dX}{dx} = \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)' = \left\{x + \left(x^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}'$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}-1} \times \left(x^2 + a^2\right)'$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 + a^2\right)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = 1 + x\left(x^2 + a^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dy}{dX} = \left(\log X\right)' = \frac{1}{X}$$
$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dX}{dx}\cdot\frac{dy}{dX} = \left(1 + x\left(x^2 + a^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \times \frac{1}{X}$$
$$= \left(1 + x\left(x^2 + a^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \times \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) \times \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}\right)$$

$$= \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) \times \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

（４） $y = e^{x^x}$

の両辺の対数をとれば，

$$\log y = \log e^{x^x} = x^x \log e = x^x$$

となる．上式の左辺をxで微分すれば，

$$\frac{d \log y}{dx} = \frac{1}{y}(y)' = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \tag{1}$$

右辺をで微分するために，$X = x^x$とおいて両辺の対数をとれば，

$$\log X = x \log x$$

となるので，

$$\frac{d \log X}{dx} = \frac{1}{X} \cdot X' = \frac{1}{X} \cdot \frac{dX}{dx}$$

$$\frac{d(x \log x)}{dx} = 1 \times \log x + x \times \frac{1}{x} = \log x + 1$$

より，

$$\therefore \quad \frac{dX}{dx} = X(\log x + 1) = x^{x}(\log x + 1) \tag{2}$$

（1）式＝（2）式より，

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x^{x}(\log x + 1)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = yx^{x}(\log x + 1) = e^{x^{x}}x^{x}(\log x + 1)$$